

第2讲 平行线的性质与判定

一、 平行线定义及平行公理

平行线定义及平行公理

平行线定义：在_____内，永不_____的两条直线叫平行线.
用_____表示.

两条直线的位置关系：在_____内，不_____的两条直线只有两种位置关系，_____和_____.

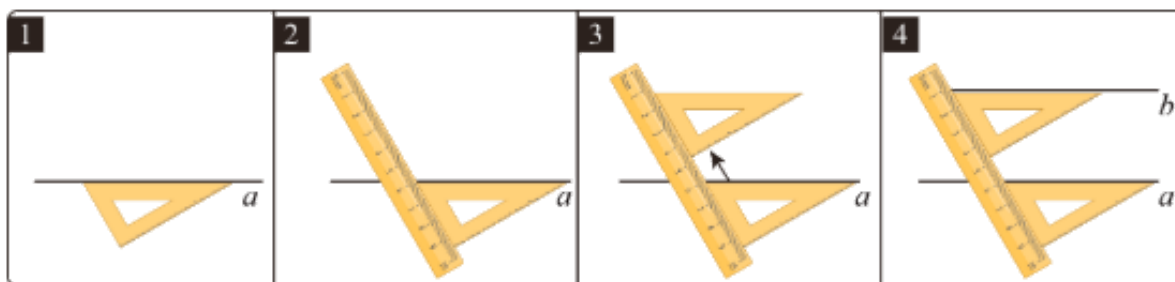
平行公理：经过_____一点，有且只有_____直线与这条直线平行.

平行公理推论：如果两条直线都和第三条直线_____, 那么这两条直线也互相_____. 简单说成：_____.

两平行线间距离：同时_____于两条平行线，并且夹在这两条平行线间的_____. 平行线间的距离处处_____.

平行线的画法：

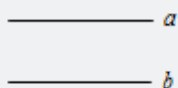
- 一 **"落"**：把三角板的一边落在已知直线上，
- 二 **"靠"**：把直尺紧靠三角板的另一边，
- 三 **"移"**：沿直尺移动三角板，直至落在已知直线上的三角板的一边经过已知点，
- 四 **"画"**：沿三角板过已知点的边画直线。



【教法备注】

1、**平行线定义**：在同一平面内，永不相交的两条直线叫平行线.用“//”表示.

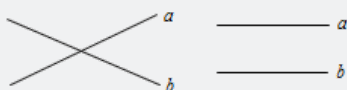
直线 a 与直线 b 互相平行，记作 $a//b$



注意：两条线段平行、两条射线平行，实际是指线段、射线所在的直线平行。

2、两直线的位置关系：

(1) 相交和平行：在**同一平面内**，不重合的两条直线只有两种位置关系，**相交和平行**。



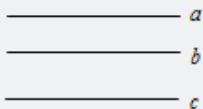
(2) 在同一平面内两直线不相交时，它们一定平行；反之，在同一平面内两直线平行时，它们一定不相交。（这里，我们把重合的直线视为一条直线）

3、平行公理及推论：

(1) 平行公理：经过**直线外**一点，**有且只有一条**直线与这条直线平行。

(2) 平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。简单说成：平行于同一直线的两条直线互相平行。

即 $a//b, b//c$ ，那么 $a//c$ （这也称为平行线的传递性）。



注意：

- ① 平行公理特别强调“经过直线外一点”，而非直线上一点，要区别于垂线的性质。
- ② “有”表示存在，“只有”表示唯一，说明了平行线的存在性和唯一性。

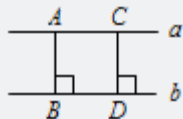
拓展：

几条直线都与同一直线平行，这几条直线也互相平行。

4、两平行线间距离：

(1) 两条平行线间的距离：同时垂直于两条平行线，并且夹在这两条平行线间的线段的长度叫做这两条平行线间的距离。

(2) 平行线间的距离处处相等。



书写：线段 AB 、 CD 的长度是平行线 a 、 b 间的距离。

$\because a//b, AB \perp b, CD \perp b,$

$\therefore AB = CD.$

|| 例题1

1. 下列说法正确的有 _____：

- ①若两条线段不相交，则它们互相平行；

- ②垂直于同一条直线的两条直线互相平行；
- ③在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；
- ④两条直线被第三条直线所截，同旁内角互补；
- ⑤过线段外一点，有且只有一条直线平行于已知线段；
- ⑥在同一平面内有2019条直线 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ ，如果 $a_1 // a_2, a_2 \perp a_3, a_3 // a_4, a_4 \perp a_5, \dots$ ，依次下去，那么 $a_1 // a_{2019}$.

【答案】 ③

【解析】 ①：在同一平面内的两条直线不相交，那它们一定平行，线段是有端点的，所以①说法错误 .

②：在同一平面内，同垂直于一条直线的两条直线互相平行，②说法错误 .

③：在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，③正确 .

④：两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补，④说法错误 .

⑤：过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行 . 当线段外一点与已知线段共线时，则不存在直线与线段平行 . 故⑤错误 .

⑥：通过观察可知， $a_1 // a_2 // a_5 // a_6 // a_9 // a_{10} \dots$,

$a_1 \perp a_3, a_1 \perp a_4, a_1 \perp a_7, a_1 \perp a_8$,

即四个一组进行循环，

$\therefore 2019 \div 4 = 504 \dots 3$,

$\therefore a_1 \perp a_{2019}$,

$\therefore$ ⑥错误 .

综上，正确的是③ .

【标注】【知识点】直线的位置关系

练习1

2. 下列说法正确的是 () .

- ①在同一平面内，两条不重合的直线只有平行或相交这两种位置关系；
- ②过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；
- ③平行于同一直线的两条直线互相平行；
- ④直线外一点到这条直线的垂线段叫做点到直线的距离 .

A. ①②③

B. ①②③④

C. ②④

D. ②③

【答案】A

【解析】①在同一平面内，两条直线的关系是：平行，重合以及相交，故两条不重合的直线只有平行或相交这两种位置关系的说法正确；

②过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行的说法正确；

③平行于同一直线的两条直线互相平行的说法正确；

④说法错误，正确说法应为直线外一点到这条直线的垂线段的长度叫做点到直线的距离．

综上，①②③说法正确，④说法错误，故选项A选项．

【标注】【知识点】平行公理及其推论

3. 下列说法正确的个数是（ ）个．

(1) 平面内任意两条直线的位置不是相交就是平行；

(2) 过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

(3) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；

(4) 在同一平面内，如果 $a \perp b$ ， $b \perp c$ ，那么 $a \parallel c$ ；

(5) 如果 $a \parallel b$ ， $b \parallel c$ ，那么 $a \parallel c$ ；

(6) 若 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，则 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 互补．

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】B

【解析】(1) 平面内任意两条直线的位置不是相交就是平行，(1) 正确；

(2) 过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行，故(2) 错误；

(3) 同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，故(3) 错误；

(4) 在同一平面内，如果 $a \perp b$ ， $b \perp c$ ，那么 $a \parallel c$ ，(4) 正确；

(5) 如果 $a \parallel b$ ， $b \parallel c$ 那么 $a \parallel c$ ，平行线的传递性，(5) 正确；

(6) 若 $\angle 1 + \angle 2 = 180$ ，则 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，两个角的和是 180° ，称这两个角互补，故(6) 错误．

故选B．

【标注】【知识点】直线的位置关系

4. 同一平面内有四条直线 a ， b ， c ， d ，若 $a \parallel b$ ， $a \perp c$ ， $b \perp d$ ，则 c ， d 的位置关系为（ ）．

A. 互相垂直

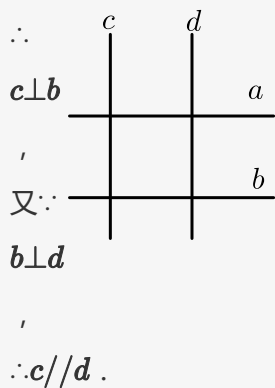
B. 互相平行

C. 相交

D. 没有确定关系

【答案】 B

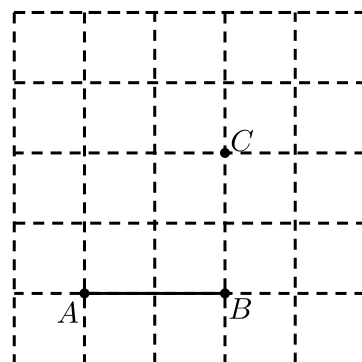
【解析】 如图, $\because a \parallel b, a \perp c,$



【标注】 【知识点】 平行公理及其推论

例题2

5. 如图, 已知线段 AB 及点 C , 在方格纸上画图并回答问题.



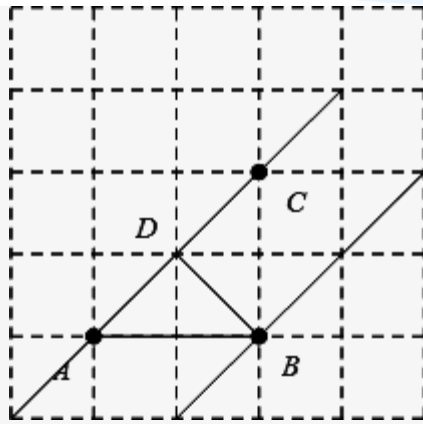
- (1) 画直线 AC .
- (2) 过点 B 画直线 AC 的平行线 l .
- (3) 过点 B 画直线 AC 的垂线, 垂足是 D ; 点 B 到直线 AC 的距离是线段 _____ 的长度.

【答案】 (1) 作图见解析.

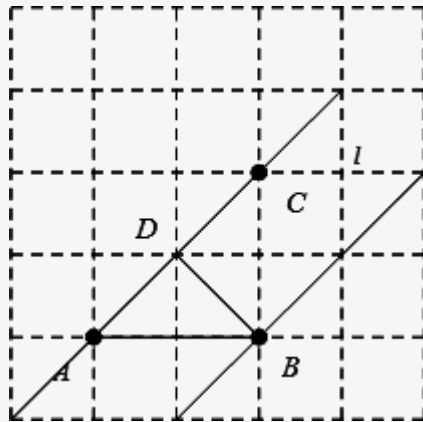
(2) 作图见解析.

(3) BD

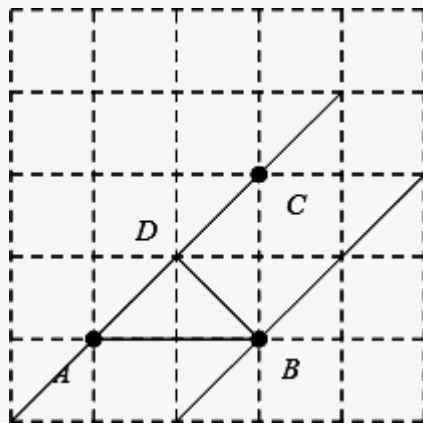
【解析】 (1) 直线 AC 如图所示.



(2) 过点 B 画直线 AC 的平行线 l , 如图所示 .



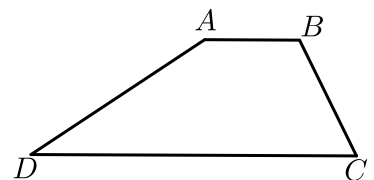
(3) $BD \perp AC$, 垂足为 D , 如图所示, 点 B 到直线 AC 的距离是线段 BD 的长度 .



【标注】【知识点】过一点作已知直线的平行线

练习2

6. 按要求画图：(1) 作 $BE \parallel AD$ 交 DC 于 E ；(2) 连接 AC , 作 $BF \parallel AC$ 交 DC 的延长线于 F ；(3) 作 $AG \perp DC$ 于 G .

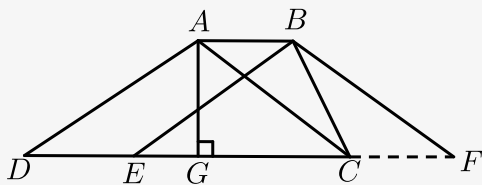


【答案】画图见解析．

【解析】（1）如图所示： BE 即为所求；

（2）如图所示： BF 即为所求；

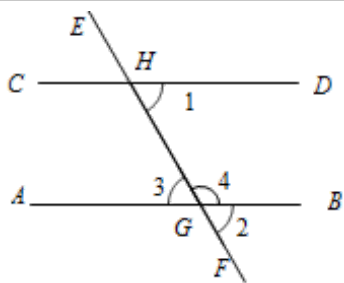
（3）如图所示： AG 即为所求．



【标注】【知识点】过一点作已知直线的平行线

【知识点】平行线的定义

二、平行线的判定



【书写】

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

如果两条直线都与_____，那么这
两条直线也互相平行．

简单说成：

_____．

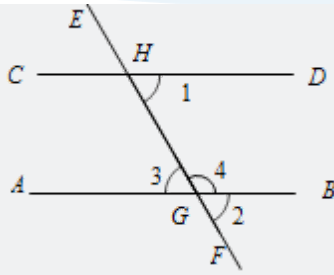
在_____内，_____于同一直线的两条直线
互相平行．（不可直接用，需证明）

【教法备注】

1、平行线判定一：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：同位角相等，两直线平行．



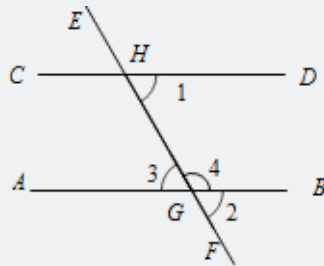
$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行) .

2、平行线判定二:

两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行 .

简单说成: 内错角相等, 两直线平行 .



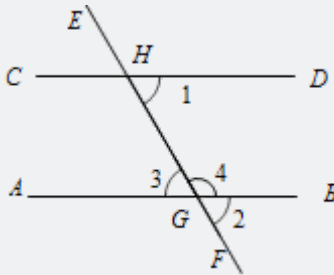
$$\because \angle 1 = \angle 3,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等, 两直线平行) .

3、平行线判定三:

两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行 .

简单说成: 同旁内角互补, 两直线平行 .



$$\because \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (同旁内角互补, 两直线平行) .

4、平行公理推论:

如果两条直线都与第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行 .

简单说成: 平行于同一直线的两条直线互相平行。

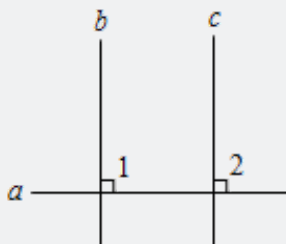


$$\because a \parallel b, b \parallel c,$$

$\therefore a \parallel c$ (平行于同一直线的两条直线互相平行) .

5、利用垂直证明平行：

在同一平面内，垂直于同一直线的两条直线平行.（不可直接用，需证明）



直线 a, b, c 在同一平面，

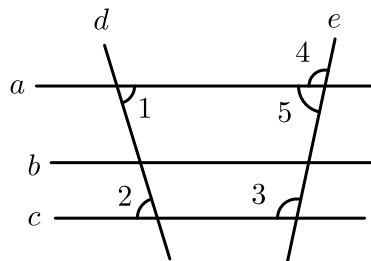
$\because a \perp b, a \perp c,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ,$

$\therefore b \parallel c$ （同位角相等，两直线平行）.

例题3

7. 如图，下列说法错误的是（ ）.



A. 若 $a \parallel b, b \parallel c$ ，则 $a \parallel c$

B. 若 $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $a \parallel c$

C. 若 $\angle 3 = \angle 2$ ，则 $b \parallel c$

D. 若 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ ，则 $a \parallel c$

【答案】C

【解析】A. 若 $a \parallel b, b \parallel c$ ，则 $a \parallel c$ ，利用了平行公理，正确，

B. 若 $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $a \parallel c$ ，利用了内错角相等，两直线平行，正确，

C. 若 $\angle 3 = \angle 2$ ，不能判断 $b \parallel c$ ，错误，

D. 若 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ ，则 $a \parallel c$ ，利用了同旁内角互补，两直线平行，正确.

【标注】【知识点】几何图形

8. 如图，已知 $CD \perp DA, DA \perp AB, \angle 1 = \angle 2$. 试说明 $DF \parallel AE$. 请你完成下列填空，把证明过程补充完整.

证明： $\because$ _____，

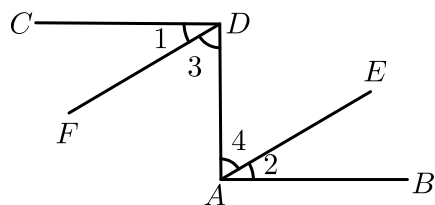
$\therefore \angle CDA = 90^\circ, \angle DAB = 90^\circ$ （_____）.

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}),$$

$$\therefore DF \parallel AE (\underline{\hspace{2cm}}).$$



【答案】 $CD \perp DA$, $DA \perp AB$; 垂直定义; $\angle 3 = \angle 4$; 等角的余角相等 或 等式的性质; 内错角相等, 两直线平行

【解析】 略.

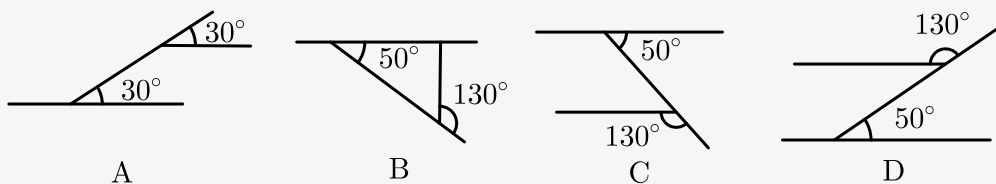
【标注】【知识点】平行线判定

练习3

9. 在广场上练习驾驶汽车, 两次拐弯后, 行驶的方向与原来的方向相同, 这两次拐弯的角度可能是 () .
- A. 第一次向左拐 30° , 第二次向右拐 30° B. 第一次向右拐 50° , 第二次向左拐 130°
- C. 第一次向右拐 50° , 第二次向右拐 130° D. 第一次向左拐 50° , 第二次向左拐 130°

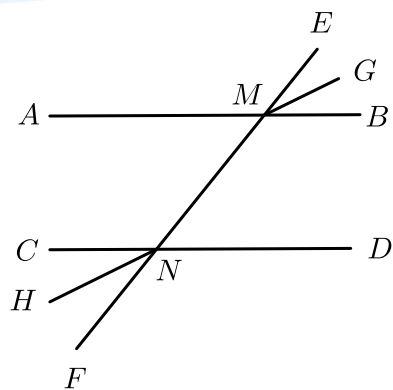
【答案】 A

【解析】 如图所示 (实线为行驶路线): 选A.



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

10. 如图, MG 是 $\angle BME$ 的平分线, NH 是 $\angle CNF$ 的平分线, 且 $\angle BME = \angle CNF$. 求证.



(1) $AB \parallel CD$.

(2) $MG \parallel NH$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 方法一： $\because \angle BME = \angle AMN$

又 $\angle BME = \angle CNF$

$\therefore \angle AMN = \angle CNF$

$\therefore AB \parallel CD$.

方法二： $\because \angle BME = \angle CNF = \angle END$,

$\therefore AB \parallel CD$ (同位角相等，两直线平行) .

(2) 方法一： $\because MG$ 是 $\angle BME$ 的平分线

NH 是 $\angle CNF$ 的平分线

$\therefore \angle EMG = \frac{1}{2} \angle EMB$

$\angle HNF = \frac{1}{2} \angle CNF$

$\because \angle BME = \angle CNF$

$\therefore \angle EMG = \angle HNF$, $\angle GMN = 180^\circ - \angle EMG$,

$\angle HNM = 180^\circ - \angle HNF$

$\therefore \angle GMN = \angle HNM$

$\therefore MG \parallel HN$.

方法二：由①得： $AB \parallel CD$, $\therefore \angle BMN = \angle CNM$,

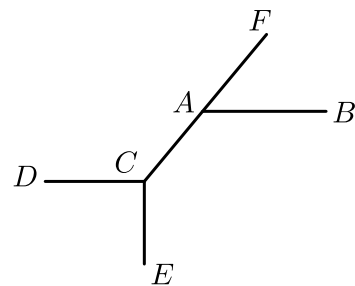
又 $\because \angle BMG = \angle CNH$,

$\therefore \angle GMN = \angle HNM$,

$\therefore MG \parallel NH$ (内错角相等，两直线平行) .

【标注】 【知识点】 平行线判定

11. 如图, $\angle BAF = 50^\circ$, $\angle ACE = 140^\circ$, $CD \perp CE$, 求证: $DC \parallel AB$.



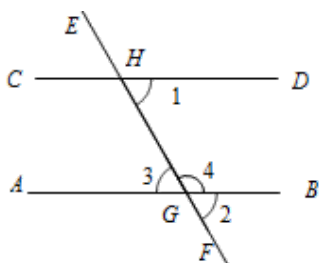
【答案】证明见解析.

【解析】 $\because CD \perp CE$,
 $\therefore \angle DCE = 90^\circ$,
 $\because \angle ACE = 140^\circ$,
 $\angle ACE + \angle DCE + \angle ACD = 360^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = 130^\circ$,
 又 $\because \angle BAF = 50^\circ$, $\angle BAF + \angle BAC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 130^\circ$, $\angle BAC = \angle ACD$,
 $\therefore DC \parallel AB$. (内错角相等, 两直线平行)

【标注】【知识点】平行线判定

三、平行线的性质

【如图所示】

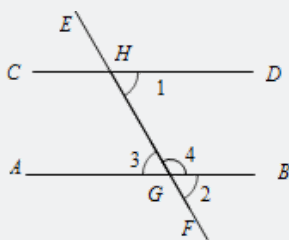


两条平行线被第三条直线所截, _____.
 简单说成: _____.
 书写:

两条平行线被第三条直线所截, _____.
 简单说成: _____.
 书写:

两条平行线被第三条直线所截, _____.
 简单说成: _____.
 书写:

【教法备注】



1、平行线的性质1：

两条平行线被第三条直线所截，同位角相等．

简单说成：两直线平行，同位角相等．

书写：

$\because AB // CD,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (两直线平行，同位角相等)．

2、平行线的性质2：

两条平行线被第三条直线所截，内错角相等．

简单说成：两直线平行，内错角相等．

书写：

$\because AB // CD,$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ (两直线平行，内错角相等)

3、平行线的性质3：

两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补．

简单说成：两直线平行，同旁内角互补．

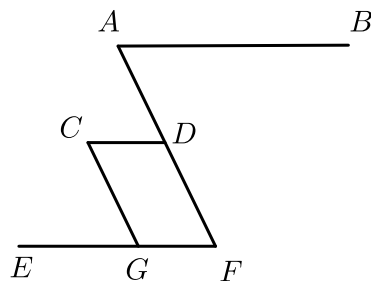
书写：

$\because AB // CD,$

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (两直线平行，同旁内角互补)．

|| 例题4

12. 如图， $AB // CD // EF$ ， $AF // CG$ ，则图中与 $\angle A$ (不包括 $\angle A$) 相等的角有 () ．



A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】C

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle A = \angle ADC;$$

$\because AB \parallel EF$,

$$\therefore \angle A = \angle AFE;$$

$\because AF \parallel CG$,

$$\therefore \angle EGC = \angle AFE = \angle A;$$

$\because CD \parallel EF$,

$$\therefore \angle EGC = \angle DCG = \angle A;$$

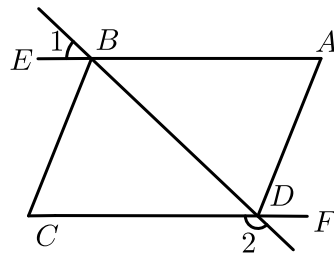
$\therefore$ 与 $\angle A$ 相等的角有 $\angle ADC$ 、 $\angle AFE$ 、 $\angle EGC$ 、 $\angle GCD$ ，共四个。

故选C。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】平行线的性质

13. 如图，已知 $AE \parallel CF$ ， $\angle A = \angle C$ 。



- (1) 若 $\angle 1 = 40^\circ$ ，求 $\angle 2$ 的度数。
- (2) 判断 AD 与 BC 的位置关系，并说明理由。
- (3) 若 AD 平分 $\angle BDF$ ，求证： BC 平分 $\angle DBE$ 。

【答案】(1) 140° 。

(2) $AD \parallel BC$ 。

(3) 证明见解析。

【解析】(1) $\because \angle 1 = \angle ABD$ ， $\angle 1 = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = 40^\circ.$$

$\because AE \parallel CF$,

$$\therefore \angle ABD = \angle BDC = 40^\circ ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle BDC = 140^\circ .$$

(2) $AD \parallel BC$, 证明如下 :

$$\therefore AE \parallel CF ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ADC = 180^\circ .$$

$$\therefore \angle A = \angle C ,$$

$$\therefore \angle C + \angle ADC = 180^\circ ,$$

$$\therefore BC \parallel AD .$$

(3) $\therefore AE \parallel CF$,

$$\therefore \angle EBD = \angle BDF .$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BDF ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle ADF = \frac{1}{2} \angle BDF .$$

$$\therefore BC \parallel AD ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CBD .$$

$$\therefore \angle BDF = 2\angle BDA , \angle BDA = \angle CBD ,$$

$$\therefore \angle BDF = 2\angle CBD .$$

$$\therefore \angle BDF = \angle EBD ,$$

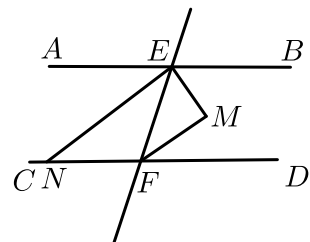
$$\therefore \angle EBD = 2\angle CBD ,$$

$$\therefore BC \text{ 平分 } \angle EBD .$$

【标注】【知识点】平行线判定与性质的综合

练习4

14. 如图 , $AB \parallel CD$, 若 EM 平分 $\angle BEF$, FM 平分 $\angle EFD$, EN 平分 $\angle AEF$, 则与 $\angle BEM$ 互余的角有 () .



A. 6个

B. 5个

C. 4个

D. 3个

【答案】 B

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle AEF + \angle EFC = 180^\circ, \angle BEF + \angle EFD = 180^\circ,$$

$$\angle AEN = \angle ENF,$$

$\because EM$ 平分 $\angle BEF$, FM 平分 $\angle EFD$, EN 平分 $\angle AEF$,

$$\therefore \angle AEN = \angle FEN, \angle BEM = \angle FEM, \angle EFM = \angle DFM,$$

$$\therefore \angle BEM + \angle MFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle BEF = 180^\circ,$$

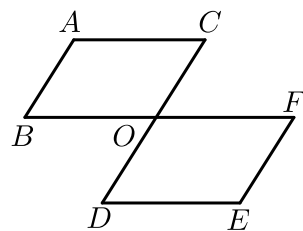
$$\therefore \angle AEN + \angle BEM = 90^\circ,$$

则与 $\angle BEM$ 互余的角有 $\angle AEN$, $\angle NEF$, $\angle ENF$, $\angle EFM$, $\angle MFD$ 共5.

故选: B.

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

15. 如图, 已知 BF , CD 相交于点 O , $\angle D = 40^\circ$, 下列说法正确的是().



A. 当 $\angle C = 40^\circ$ 时, $AB \parallel CD$

B. 当 $\angle B = 40^\circ$ 时, $AC \parallel DE$

C. 当 $\angle E = 120^\circ$ 时, $CD \parallel EF$

D. 当 $\angle BOC = 140^\circ$ 时, $BF \parallel DE$

【答案】D

【解析】A 选项: 当 $\angle C = 40^\circ$ 时, $AB \parallel CD$, 错误.

$$\therefore \angle C = \angle D = 40^\circ,$$

$\therefore AC \parallel DE$ (内错角相等, 两直线平行).

B 选项: 当 $\angle B = 40^\circ$ 时, $AC \parallel DE$, 错误.

$$\therefore \angle B = \angle D = 40^\circ,$$

$BF \parallel DE$ (同位角相等, 两直线平行).

C 选项: 当 $\angle E = 120^\circ$ 时, $CD \parallel EF$, 错误.

$$\therefore \angle E = 120^\circ, \angle D = 40^\circ,$$

$$\angle E + \angle D = 160^\circ \neq 180^\circ .$$

D 选项：当 $\angle BOC = 140^\circ$ 时， $BF \parallel DE$

，正确．

$\therefore \angle BOC = \angle DOF$ （对顶角相等），

$$\angle DOF + \angle D = 180^\circ ,$$

$\therefore BF \parallel DE$ （同旁内角互补，两直线平行）

故选 D．

【标注】【知识点】平行线判定

16. 如图， $AF \parallel CD$ ，点 B 、 E 分别在直线 AF 、 CD 上，且 $BC \perp BD$ ， BD 平分 $\angle EBF$ ， CB 平分 $\angle ACD$ ，

下列结论：

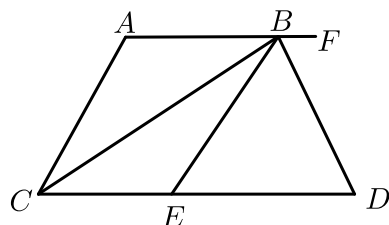
① BC 平分 $\angle ABE$ ；

② $AC \parallel BE$ ；

③ $\angle BCD + \angle BDC = 90^\circ$ ；

④ $\angle DBF = 2\angle ABC$ ，

其中正确的结论个数是（ ）．



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 ① 设 $\angle DBF = \alpha$ ，则 $\angle EBD = \alpha$ ，

由 $BC \perp BD$ 可得 $\angle CBE = 90^\circ - \alpha$ ，

所以 $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$ ，

所以 $\angle ABC = \angle CBE$ ，即 BC 平分 $\angle ABE$ ，正确；

② 由 ① $\angle ECB = 90^\circ - \alpha$ ，

故 $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$ ，

由 $\angle ACB = \angle EBC$ 可得 $AC \parallel BE$ ，正确；

③ $\angle BCD + \angle BDC = 90^\circ - \alpha + \angle DBF = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$ ，正确；

$$\textcircled{4} \angle DBF = \alpha, 2\angle ABC = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$$

两者不一定相等，错误；

故选C.

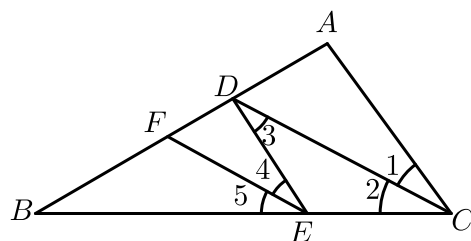
【标注】【知识点】角的平分线及等分线的定义

【知识点】平行线的性质

【知识点】角分线性质定理

17. 如图， CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线， $DE \parallel AC$ 交 BC 于点 E ， $EF \parallel CD$ 交 AB 于点 F .

求证： EF 平分 $\angle BED$.



【答案】证明见解析.

【解析】方法一： $\because CD$ 是 $\angle ACB$ 的角平分线，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3, \angle 5 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5,$$

$$\therefore EF \text{ 平分 } \angle BED.$$

方法二： $\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ (角平分线的性质)}$$

$$\because DE \parallel AC \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 \text{ (两直线平行，内错角相等)}$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 \text{ (等量代换)}$$

$$\because EF \parallel CD \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 5 \text{ (两直线平行，同位角相等)}$$

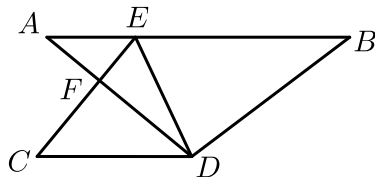
$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (两直线平行，内错角相等)}$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5 \text{ (等量代换)}$$

即 EF 平分 $\angle BED$.

【标注】【知识点】角平分线判定定理

18. 如图, $AB \parallel CD$, 点 E 在线段 AB 上, 连接 EC 、 ED 、 AD , 且 ED 平分 $\angle CEB$, $AD \perp EF$, 若 $\angle ADC = 42^\circ$, $\angle A - \angle B = 8^\circ$, 求 $\angle BDE$ 的度数.



【答案】 80° .

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ADC = \angle A = 42^\circ,$$

$$\because \angle A - \angle B = 8^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 42^\circ - 8^\circ = 34^\circ,$$

$$\because AD \perp CE,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ - \angle A = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle CEB = 180^\circ - \angle AEC = 132^\circ,$$

又 $\because ED$ 平分 $\angle BEC$,

$$\therefore \angle BED = \frac{1}{2} \angle BEC = 66^\circ,$$

在 $\triangle BED$ 中,

$$\angle EDB = 180^\circ - \angle B - \angle DEB = 80^\circ.$$

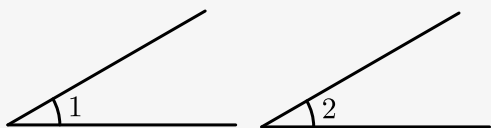
【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

|| 例题5

19. 两个角的两边分别平行, 若其中一个角比另一个角的2倍少 30° , 则这两个角的度数分别为 _____.

【答案】 30° , 30° 或 110° , 70°

【解析】①如图,



若 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的两边分别平行，则有 $\angle 1 = \angle 2$ ，

由题意可得 $\angle 1 = 2\angle 2 - 30^\circ$ ，

所以 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ 。

②如图，



若 $\angle 1$ ， $\angle 2$ 的两边分别平行，则有 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，

由题意得 $\angle 1 = 2\angle 2 - 30^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 110^\circ$ ，

故这两个角分别为 30° ， 30° 或 110° ， 70° 。

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-需要分类讨论

练习5

20. 有两个角， $\angle DCE = 130^\circ$ ， $\angle AFB = 40^\circ$ ，其中 $\angle DCE$ 保持不动，且 $\angle DCE$ 的一边 $CD \parallel FB$ ，另一边 CE 与直线 AF 相交于点 P ，如图1为当点 E 、 F 、 C 在同一条直线上，即点 F 与点 P 重合时的情况，如图2请写出点 E 、 F 、 C 不在同一条直线上时（图2是情况之一）， $\angle APE$ 所有可能的度数 _____。

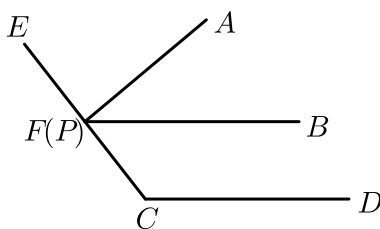


图 1

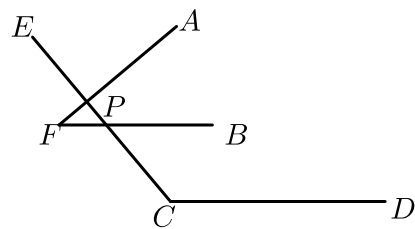


图 2

【答案】 90° ， 170° 或 10°

【解析】

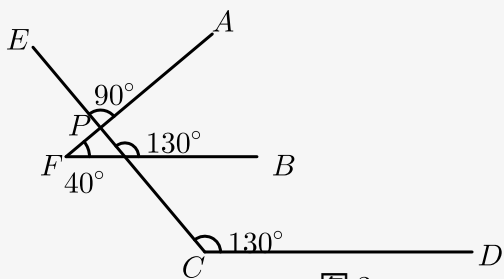


图 3

$$\angle APE = 90^\circ,$$

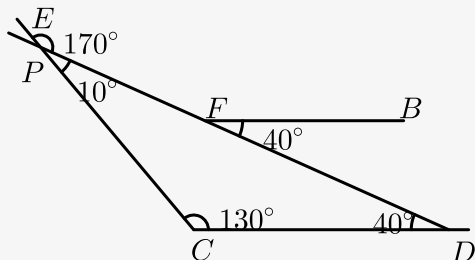


图 4

$$\angle APE = 170^\circ,$$

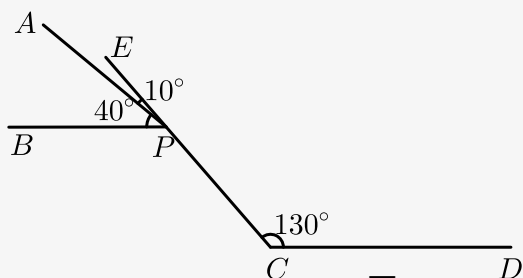
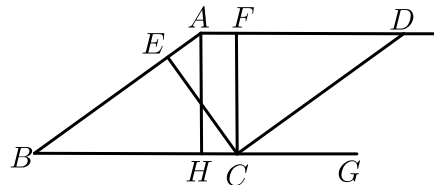


图 5

$$\angle APE = 10^\circ.$$

【标注】【知识点】平行线的性质

21. 如图，已知 $AB \parallel DC$ ， $AD \parallel BG$ ， $\angle DCE = 90^\circ$ ，点 E 在线段 AB 上， $\angle FCG = 90^\circ$ ，点 F 在直线 AD 上， $\angle AHG = 90^\circ$ 。



- (1) 若 $\angle ECF = 35^\circ$ ，求 $\angle BCD$ 的度数。
- (2) 找出图中与 $\angle FDC$ 相等的角，并说明理由。
- (3) 在(1)的条件下，点 C (不与点 B 、 H 重合)从点 B 出发，沿射线 BG 的方向移动，其他条件不变，请直接写出 $\angle BAF$ 的度数(不必说明理由)。

【答案】(1) 145° 。

(2) $\angle FDC = \angle B = \angle ECF = \angle DCG$, 证明见解析 .

(3) 145° 或 35° .

【解析】 (1) $\because \angle FCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FCB = \angle FCG = 90^\circ ,$$

$$\because \angle ECF = 35^\circ ,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle FCB - \angle ECF = 55^\circ ,$$

$$\because \angle DCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 145^\circ .$$

(2) $\because AD \parallel BG$,

$$\therefore \angle DCG = \angle FDC \text{ (两直线平行, 内错角相等)} ,$$

$$\because AB \parallel CD ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCG \text{ (两直线平行, 同位角相等)} ,$$

$$\because \angle FCG = 90^\circ , AD \parallel BG ,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle FCG = 90^\circ \text{ (两直线平行, 同旁内角互补)} ,$$

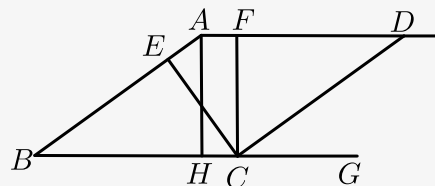
$$\therefore \angle FDC + \angle FCD = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle DCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle FCD + \angle ECF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle ECF \text{ (同角的余角相等)} .$$

(3) 如图, 当点 C 在 BH 延长线上时, 点 F 在线段 AD 上,

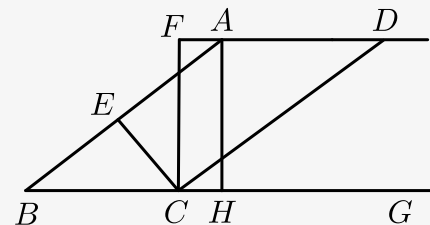


$$\because \angle ECF = \angle DCG = \angle B = 35^\circ ,$$

$$AD \parallel BG ,$$

$$\therefore \angle BAF = 180^\circ - \angle B = 145^\circ \text{ (两直线平行, 同旁内角互补)} .$$

如图, 当点 C 在线段 BH 上时, 点 F 在 DA 延长线上,



$$\because \angle ECF = \angle DCG = \angle B = 35^\circ ,$$

$$AD \parallel BG ,$$

$\therefore \angle BAF = \angle B = 35^\circ$ (两直线平行, 内错角相等) .

【标注】【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

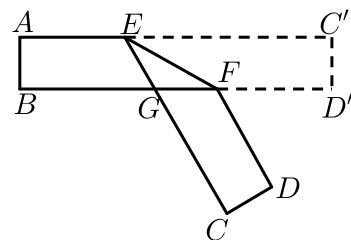
【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

【知识点】平行线的性质

【思想】分类讨论思想

|| 例题6

22. 一张对边互相平行的纸条折成如图, EF 是折痕, 若 $\angle EFB = 32^\circ$, 则: ① $\angle C'EF = 32^\circ$; ② $\angle AEC = 148^\circ$; ③ $\angle BGE = 64^\circ$; ④ $\angle BFD = 106^\circ$. 以上结论正确的有 _____. (填序号)

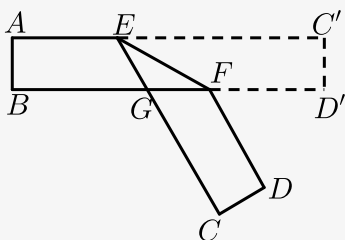


【答案】①③

【解析】 $\because AC' // BD'$,

$\therefore \angle C'EF = \angle EFB = 32^\circ$, 所以①正确;

$\because$ 一张对边互相平行的纸条折成如图, EF 是折痕,



$\therefore \angle C'EF = \angle CEF = 32^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - 2 \times 32^\circ = 116^\circ$, 所以②错误;

$\because AC' // BD'$,

$\therefore \angle BGE + \angle AEG = 180^\circ$,

$\therefore \angle BGE = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$, 所以③正确;

$\because GC // FD$,

$\therefore \angle BFD = \angle BGC = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$, 所以④错误.

故答案为：①③．

【标注】【知识点】平行线相关折叠问题

练习6

23. 将长方形纸片 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处，折痕为 BE （如图1），再沿过点 E 的直线折叠，使点 D 落在 BE 上的点处 D' ，折痕为 EG （如图2），再展开纸片（如图3），则图3中 $\angle\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

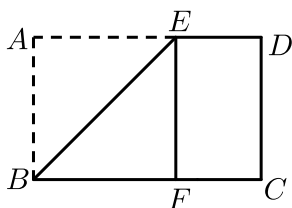


图1

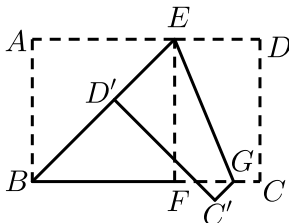


图2

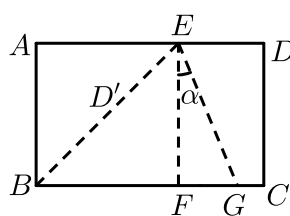


图3

【答案】 22.5°

【解析】由翻折可知 $\angle AEB = \angle FEB$ ， $\angle EFB = \angle A = 90^\circ$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AEF + \angle EFB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle FEB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BED = 135^\circ$ ，

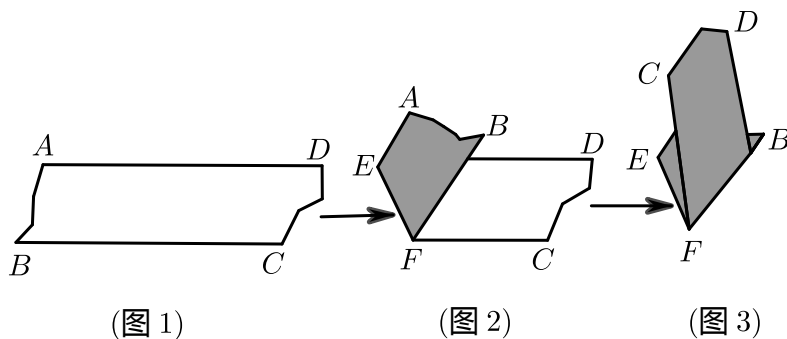
由翻折可知 $\angle BEG = \angle DEG$ ，

$\therefore \angle DEG = 67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle\alpha = 90^\circ - \angle DEG = 22.5^\circ$ ．

【标注】【知识点】平行线相关折叠问题

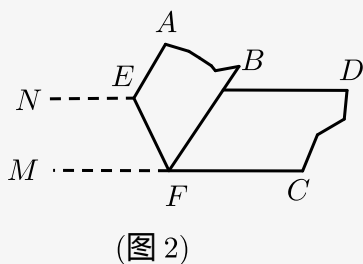
24. 如图，图1是 $AD \parallel BC$ 的一张纸条，按图1→图2→图3，把这一纸条先沿 EF 折叠并压平，再沿 BF 折叠并压平，若图3中 $\angle CFE = 18^\circ$ ，则图2中 $\angle AEF$ 的度数为（ ）．



- A. 120° B. 108° C. 126° D. 114°

【答案】 D

【解析】



如图2中，设 $\angle AEF = x$ ，

由折叠： $\angle NEF = x$ 。

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EFM = 180^\circ - x$ 。

由折叠 $\angle EFB = 180^\circ - x$ ，

$\therefore \angle BFC = 2x - 180^\circ$ ，

再经过图3的拆叠后，图3中，

$\angle EFB = 180^\circ - x$ ，

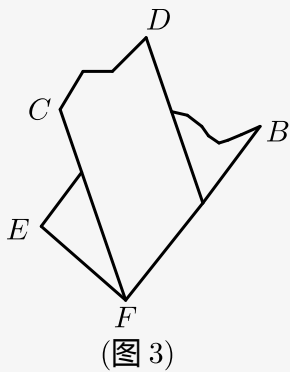
$\angle CFB = 2x - 180^\circ$ 。

又 $\because \angle CFE = 18^\circ$ ，

$\therefore \angle CFE = \angle EFB - \angle CFB$ ，

$18^\circ = (180^\circ - x) - (2x - 180^\circ)$ 。

$x = 114^\circ$ 。

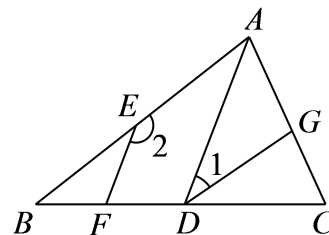


【标注】【知识点】平行线相关折叠问题

四、平行综合

例题7

25. 如图， $AB \parallel DG$ ， $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 。



(1) 求证： $AD \parallel EF$ 。

(2) 若 DG 是 $\angle ADC$ 的平分线， $\angle 2 = 150^\circ$ ，求 $\angle B$ 的度数。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 30° 。

【解析】(1) $\because AB \parallel DG$,

$$\therefore \angle BAD = \angle 1,$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel EF.$$

(2) $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\angle 2 = 150^\circ$,

$$\therefore \angle 1 = 30^\circ,$$

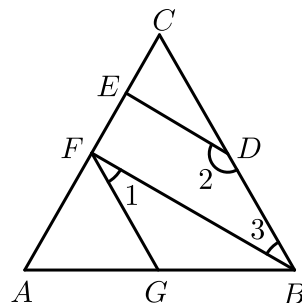
$\because DG$ 是 $\angle ADC$ 的平分线，

$$\begin{aligned}\therefore \angle GDC &= \angle 1 = 30^\circ, \\ \therefore AB &\parallel DG, \\ \therefore \angle B &= \angle GDC = 30^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行线判定

练习7

26. 如图, $\angle AGF = \angle ABC$, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.



- (1) 试判断 BF 与 DE 的位置关系, 并说明理由.
- (2) 若 $BF \perp AC$, $\angle 2 = 150^\circ$, 求 $\angle AFG$ 的度数.

【答案】(1) $BF \parallel DE$.

(2) 60° .

【解析】(1) $\because \angle AGF = \angle ABC$,

$$\therefore GF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore BF \parallel DE.$$

(2) $\because BF \parallel DE$, $BF \perp AC$,

$$\therefore DE \perp AC,$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 2 = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 30^\circ,$$

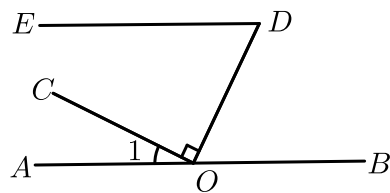
$$\therefore \angle AFG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】平行线的性质

【知识点】平行线判定

【能力】推理论证能力

27. 如图，点 O 在直线 AB 上， $OC \perp OD$ ， $\angle EDO$ 与 $\angle 1$ 互余．



(1) 求证： $ED \parallel AB$ ．

(2) 过点 D 画直线 MN ，使 $MN \parallel OC$ 交 AB 于点 N ，若 $\angle EDM = 25^\circ$ ，补全图形，并求 $\angle 1$ 的度数．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) 画图见解析． $\angle 1 = 25^\circ$ ．

【解析】 (1) $\because OC \perp OD$ ，

$$\therefore \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle BOD = 90^\circ,$$

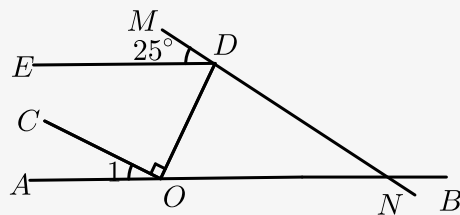
$$\because \angle EDO \text{ 与 } \angle 1 \text{ 互余 },$$

$$\therefore \angle 1 + \angle EDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle EDO,$$

$$\therefore ED \parallel AB.$$

(2)



$$\because MN \parallel OC,$$

$$\therefore \angle MDO + \angle COD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDO = 90^\circ - \angle EDM = 65^\circ,$$

$$\because \angle 1 + \angle EDO = 90^\circ,$$

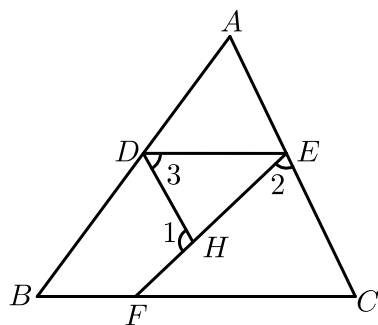
$$\therefore \angle 1 = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ. \text{ (证明方法不唯一)}$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】平行线判定

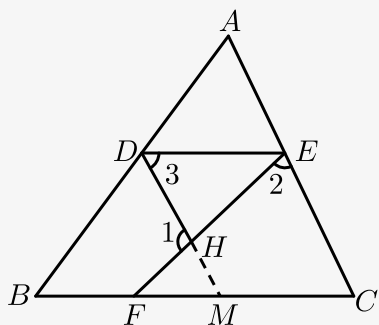
【知识点】平行线的性质

28. 如图，在三角形 ABC 中， D 、 E 、 F 三点分别在 AB 、 AC 、 BC 边上， DH 与 EF 交于点 H ，且 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\angle 3 = \angle C$ ，求证： $DE \parallel BC$ 。



【答案】 证明见解析。

【解析】 延长 DH 与 BC 交于点 M ，



$\because \angle 1$ 与 $\angle EHM$ 是对顶角，

$\therefore \angle 1 = \angle EHM$ ，

$\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle EHM + \angle 2 = 180^\circ$ ，

$\therefore DH \parallel AC$ ，

$\therefore \angle DMB = \angle C$ ，

又 $\because \angle 3 = \angle C$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle DMB$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ 。

【标注】 【知识点】 平行线判定